

Лекция 14

Тема. Двойные интегралы.

План лекции:

- 1) Определение двойного интеграла как предела сумм Римана.
- 2) Основные свойства двойного интеграла.
- 3) Вычисление двойного интеграла.
- 4) Замена переменных в двойном интеграле

§1. Определение двойного интеграла как предела сумм Римана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Плоской фигурой будем называть любое ограниченное множество точек плоскости.

Определение Плоская фигура называется *квадрируемой*, если точная верхняя грань $\underline{P}$ множества площадей всех вписанных многоугольных фигур равна точной нижней грани $\overline{P}$ множества площадей всех описанных многоугольных фигур

Число $P = \underline{P} = \overline{P}$ называется *площадью плоской фигуры* (по Жордану)

Пусть G – квадрируемая (и, следовательно, ограниченная) область (открытая или замкнутая) на плоскости и пусть в области G определена ограниченная функция $u = f(M) = f(x, y)$. Разобьем область G на n квадрируемых частей G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек, в каждой части G_i возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму

$$I(G_i, M_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

где Δs_i — площадь G_i . Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области G на части G_i и данному выбору промежуточных точек M_i .

Диаметром ограниченного множества G точек назовем точную верхнюю грань расстояний между двумя произвольными точками этого множества: $\sup_{\substack{M' \in G \\ M'' \in G}} \rho(M', M'')$.

Пусть d_i — диаметр G_i , $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$.

Определение. Число I называется *пределом интегральных сумм* $I(G_i, M_i)$ при $d \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения области G , у которого $d < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек M_i выполняется неравенство

$$|I(G_i, M_i) - I| < \varepsilon.$$

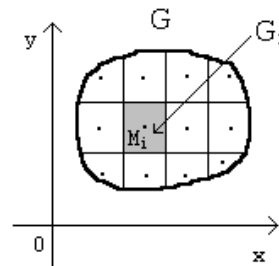
Если существует $\lim_{d \rightarrow 0} I(G_i, M_i) = I$, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается $\iint_G f(x, y) dx dy$

или $\iint_G f(M) ds$, а функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области G .

Замечание. В частности, если задано равномерное прямоугольное разбиение области G , то $S(G_i) = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ и справедлива формула $\iint_G f(x, y) dy dx = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_G \sum f(x, y) \Delta y \Delta x$.

Теорема (Необходимое условие интегрируемости).

Пусть функция $f(x, y)$ определена и интегрируема на квадрируемом множестве G . Тогда $f(x, y)$ ограничена на G . Иными словами, для интегрируемости функции $f(x, y)$ необходимо, но отнюдь не достаточно, чтобы она была ограничена на множестве G .



Приведем две теоремы, являющиеся достаточным условием интегрируемости.

Теорема 1. *Функция, непрерывная в замкнутой квадратируемой области, интегрируема в этой области.*

Теорема 2. *Функция, ограниченная в квадратируемой области и непрерывная всюду, кроме некоторого множества точек площади нуль *), интегрируема в этой области.*

*) Говорят, что множество точек плоскости имеет *площадь нуль*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует многоугольник, содержащий это множество и имеющий площадь, меньшую ε (иными словами, если это множество можно заключить в многоугольник сколь угодно малой площади).

Замечание. Можно доказать, что если функция ограничена на измеримом компакте и множество точек ее разрыва имеет меру Жордана, равную нулю, то функция интегрируема на рассматриваемом компакте.

§2. Основные свойства двойного интеграла.

Двойные интегралы обладают такими же свойствами, как и определенные интегралы (линейность, аддитивность, формулы среднего значения и т. д.).

1) **Линейность.** Если A и B числа, а функции $z = f(x, y)$ и $z = g(x, y)$ интегрируемые в G , то

$$\iint_G (A f(x, y) + B g(x, y)) dx dy = A \iint_G f(x, y) dx dy + B \iint_G g(x, y) dx dy.$$

2) **Аддитивность.** Если область G разбита на две области $G = G_1 \cup G_2$, где G_1 и G_2 не имеют общих внутренних точек, а функция $z = f(x, y)$ интегрируема в G , то

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy.$$

3) Если $f(x, y) \geq 0$ в области G , то $\iint_G f(x, y) dy dx \geq 0$.

4) Если $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то $\iint_G f_1(x, y) dy dx \leq \iint_G f_2(x, y) dy dx$.

$$5) \left| \iint_G f(x, y) dy dx \right| \leq \iint_G |f(x, y)| dy dx$$

6) **Теорема** (о среднем значении). Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$ равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования

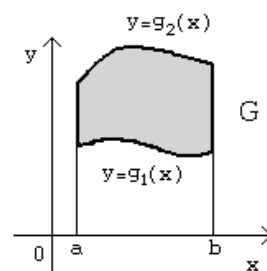
$$\iint_G f(x, y) dy dx = f(x_0, y_0) \cdot S(G)$$

§3. Вычисление двойного интеграла.

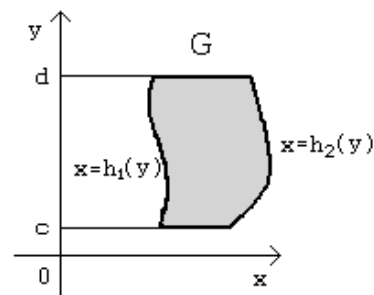
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Область G на плоскости Oxy назовем y -трапециевидной, если она ограничена линиями: прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a < b$ и графиками непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $y = g_1(x)$ и $y = g_2(x)$, где $g_1(x) \leq g_2(x)$ на $[a, b]$

Замечание. Площадь такой области, которую мы будем обозначать через $S(G)$, находится с помощью определенного интеграла:

$$S(G) = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx$$



Аналогично, область на плоскости Oxy , ограниченную прямыми $y = c$, $y = d$, где $c < d$ и графиками непрерывных на отрезке $[c, d]$ функций $x = h_1(y)$ и $x = h_2(y)$, где $h_1(y) \leq h_2(y)$ на $[c, d]$, будем называть x -трапецевидной областью.



Замечание. Аналогично, площадь этой области находится с помощью определенного интеграла: $S(G) = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y)) dy$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие области на плоскости, которые можно разбить на конечное число y (либо x)-трапецевидных областей, не имеющих общих внутренних точек (измеримые области).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Повторным интегралом по y -трапецевидной области G , ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ от функции $z = f(x, y)$ называется определенный интеграл вида

$$I_f(G) = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Здесь при нахождении внутреннего интеграла $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ переменная x считается

постоянной (параметром). Если область G x -трапецевидна и ограничена линиями $y = c$, $y = d$, $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$, то повторный (двухкратный) интеграл по G записывается в виде

$$I_f(G) = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Теорема. Пусть G - y -трапецевидная область и

1°) существует двойной интеграл $\iint_G f(x, y) dx dy$;

2°) $\forall x \in [a, b]$ существует определенный интеграл $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ (внутренний интеграл),

Тогда существует повторный (двухкратный) интеграл $I_f(G) = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$ и

справедливо равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Для вычисления двукратного интеграла сначала берем внутренний интеграл, считая x постоянным, затем берем внешний интеграл, т. е. результат первого интегрирования интегрируем по x в пределах от a до b .

В случае x -трапецевидной области аналогично получим

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx$$

Здесь при вычислении внутреннего интеграла, считаем y постоянным.

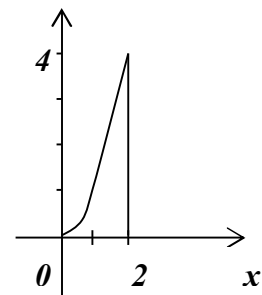
Замечание. Полезно помнить, что внешние пределы в повторном (двухкратном) интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint_G (x-y) dx dy$, если область G ограничена

линиями: $y=0$, $y=x^2$, $x=2$.

Решение.

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x-y) dy = \int_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^2 \\ &= 4 - 3,2 = 0,8 \end{aligned}$$

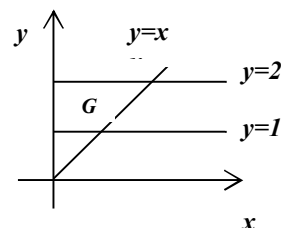


Пример 2. Вычислить интеграл $\iint_G (x^2 + y^2) dx dy$, если область G ограничена

линиями $y=x$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.

Решение.

$$\iint_G (x^2 + y^2) dx dy = \int_1^2 dy \int_0^y (x^2 + y^2) dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{x=0}^{x=y} dy = \int_1^2 \frac{4}{3} y^3 dy = \frac{4}{12} y^4 \Big|_1^2 = \frac{64}{12} - \frac{4}{12} = 5$$



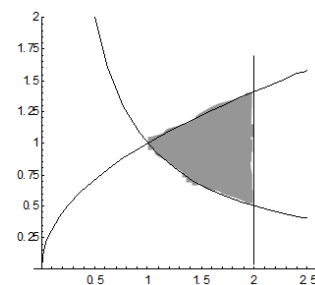
Пример 3. Вычислить интеграл $\iint_G (3x^2 - 2xy + y) dx dy$, если область интегрирования G ограничена линиями $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \iint_G (3x^2 - 2xy + y) dx dy &= \int_0^2 dy \int_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y) dx = \int_0^2 \left(x^3 - yx^2 + yx \right) \Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \\ &= \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3) dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{244}{21} \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $\iint_G y \ln x dx dy$, если область интегрирования ограничена линиями $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.

Решение.

$$\iint_G y \ln x dx dy = \int_1^2 dx \int_{1/x}^{\sqrt{x}} y \ln x dy = \int_1^2 \frac{y^2}{2} \ln x \Big|_{y=1/x}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \left[\frac{x \ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2} \right] dx$$



$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = x dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4};$$

$$\Rightarrow \int_1^2 x \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t; \quad x = e^t; \\ dt = \frac{1}{x} dx; \end{array} \right\} = \int e^{-t} t dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t; \quad du = dt; \\ dv = e^{-t} dt; \quad v = -e^{-t}; \end{array} \right\} = -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2};$$

$$\iint_G y \ln x dx dy = \frac{1}{2} \left(2 \ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5 \ln 2}{2} - \frac{5}{4} \right) = \frac{5 \ln 2}{4} - \frac{5}{8}.$$

Пример 5.

Вычислить $\iint_D (x + 2y) dx dy$, где область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$.

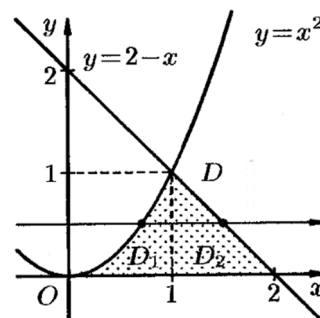
Решение.

$$\begin{aligned}\iint_D (x + 2y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} (x + 2y) dx = \\&= \int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} = \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 4y - 2y^2 - \frac{y}{2} - 2y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \\&= \left(\frac{(y-2)^3}{6} + \frac{7 \cdot y^2}{2 \cdot 2} - 2 \cdot \frac{y^3}{3} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{29}{20} = 1,45.\end{aligned}$$

Данный интеграл можно подсчитать и другим способом. Для этого область D следует разбить на две подобласти: D_1, D_2 .

$$\begin{aligned}\iint_D (x + 2y) dx dy &= \iint_{D_1} (x + 2y) dx dy + \iint_{D_2} (x + 2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x + 2y) dy + \int_1^2 dx \int_{x^2}^{2-x} (x + 2y) dy = \\&= \int_0^1 dx \cdot (xy + y^2) \Big|_0^{x^2} + \int_1^2 dx \cdot (xy + y^2) \Big|_{x^2}^{2-x} = \int_0^1 (x^3 + x^4) dx + \int_1^2 (2x - x^2 + (2-x)^2) dx = \\&= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{(x-2)^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) + \left(4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{20} + 3 - 2 = 1,45.\end{aligned}$$

Ответ, разумеется, один и тот же.



§ 4. Замена переменных в двойном интеграле.

Для упрощения вычисления двойного интеграла часто применяют метод подстановки (как это делалось и при вычислении определенного интеграла), т. е. вводят новые переменные под знаком двойного интеграла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Заменой переменных (x, y) в области $G \subset Oxy$ на переменные (u, v) в области $G' \subset O'uv$ называется пара непрерывно дифференцируемых функций

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (*)$$

определенных в области G' и осуществляющих взаимно однозначное соответствие между всеми внутренними точками областей G' и G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определителем Якоби или якобианом замены $(*)$ называется функция $J(u, v)$ определенная в G' и равная определителю составленному из частных производных функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

(Якоби Карл Густав (1804-1851) – немецкий математик)

Теорема. Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области G и замена переменных осуществляется функциями $(*)$, определенными в области G' , $J(u, v)$ – неравный нулю якобиан этой замены, тогда справедлива формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Рассмотрим частный случай замены переменных, часто используемый при вычислении двойного интеграла, а именно замену декартовых координат x и y полярными координатами r и φ .

Следствие (переход к полярным координатам). Пусть область D на плоскости Oxy соответствует область D^* в полярных координатах $O\rho r$ и функция $z = f(x, y)$ непрерывна в D , тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr.$$

В данном частном случае декартовы координаты связаны с полярными по формулам $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ и якобиан имеет вид:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

Замечания.

1. Переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2)$; область D есть круг, кольцо или часть таковых.

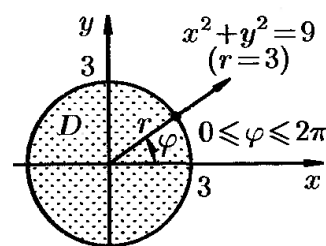
2. На практике переход к полярным координатам осуществляется путем замены $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dx dy = r dr d\varphi$; уравнения линий, ограничивающих область D , также преобразуются к полярным координатам. Преобразование области D в область D^* не выполняют, а, совместив декартову и полярную системы координат, находят нужные пределы интегрирования по r и φ (исследуя закон изменения r и φ точки $(r; \varphi)$ при ее отождествлении с точкой $(x; y)$ области D).

Пример 6.

Вычислить $\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy$, где область D — круг $x^2 + y^2 \leq 9$.

Решение.

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy &= \iint_D \sqrt{9 - (r \cos \varphi)^2 - (r \sin \varphi)^2} \cdot r dr d\varphi = \\ &= \iint_D r \cdot \sqrt{9 - r^2} dr d\varphi. \end{aligned}$$



Область D в полярной системе координат определяется неравенствами $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 3$. Заметим: область D — круг — преобразуется в область D^* — прямоугольник. Поэтому, согласно формуле замены переменной, имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D r \cdot \sqrt{9 - r^2} dr d\varphi &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r \cdot \sqrt{9 - r^2} dr = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (9 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot d(9 - r^2) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{(9 - r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 2}{3} \right) \Big|_0^3 = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (0 - 27) d\varphi = 9\varphi \Big|_0^{2\pi} = 18\pi. \end{aligned}$$